Serie 11

1. Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf $X = [0, \infty)$ und zeige, daß f Riemann-integrierbar ist, aber nicht Lebesgue-integrierbar. *4 Punkte*

2. Es seien $f_n, f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen auf einem vollständigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Es gilt:

- $F_n \to f$ f.ü. gleichmäßig $\Leftrightarrow$ ex. Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X\setminus N} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
- $f_n \to f$ fast gleichmäßig $\Leftrightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) < \varepsilon$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X\setminus N} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

.

a) *Zeige*: $f_n \to f$ f.ü. gleichm. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ fast gleichmäßig. *1 Punkt*.

b) Finde ein Beispiel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(X) < \infty$ und $f_n \to f$ fast gleichm. aber nicht $f_n \to f$ f.ü. gleichm. *3 Punkte*

3. Gib 3 (nicht-triviale, also mindestens $\#X = \infty$) Beispiele von Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu)$, so daß jeweils gilt:

a) $L^r(X, \mu) \subseteq L^s(X, \mu)$ für alle $1 \le r \le s \le \infty$. *2 Punkte*,

b) $L^s(X, \mu) \subseteq L^r(X, \mu)$ für alle $1 \le r \le s \le \infty$. *2 Punkte*,

c) $L^r(X, \mu) \neq L^r(X, \mu) \cap L^s(X, \mu) \neq L^s(X, \mu)$ für alle $r \neq s$.

4. **a)** *Zeige*: Ist $K \subset \mathbb{R}^k$ kompakt und $(f_n\colon K \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f\colon K \to \mathbb{R}$ konvergieren, so ist auch f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\lim \int_K f_n \, d\lambda^k = \int_K f \, d\lambda^k .$$

(*Hinweis: Zeige: gleichmäßige Konvergenz impliziert Lebesgue-majorisierte Konvergenz*) 2 *Punkte*

b) *optional*: Gilt dies auch für $K = \mathbb{R}^k$? Begründe! *2 Zusatzpunkte*

Rückgabe: In den Kasten am 12.01.10