Serie 10

1. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Raum mit σ-Algebra, und $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-σ-Algebra zur Dimension $n \in \mathbb{N}$.

a) *Zeige*: Eine Abbildung $f = (f^1, \dots, f^n) \colon X \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{A} - \mathcal{B}_n$-messbar genau dann, wenn alle $f^i \colon X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}_1$-messbar sind, $i = 1, \dots, n$. *3 Punkte*

b) Es sei $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ messbar und $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. *Zeige*: Dann ist $\phi \circ f \colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Folgere daraus, daß für je zwei messbare Funktionen $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ auch $f \pm g$, $f \cdot g$ messbar sind. *1 Pkt.*

c) Zeige, daß auch $\max(f, g) \colon X \to \mathbb{R}$ messbar ist. *1 Pkt.*

2. Zeige, daß folgende Funktionen Lebesgue-integrabel sind und berechne ihr Lebesgue-Integral direkt aus der Definition $\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{ x \in X \mid f(x) > t \}) \, dt$:

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ auf $[-1, 1]$. *2 Pkte.*

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$. *2 Pkte.*

c) $f(x) = 1_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ auf $\mathbb{R}$. *1 Pkt.*

3. Seien $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ sei das Zählmaß und $f(n) = q^{-n}$ mit $q > 1$ fest. Zeige explizit gemäß der obigen Definition des Integrals $\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{ x \in X \mid f(x) > t \}) \, dt$, daß

$$\int_{\mathbb{N}} f(n) \, d\mu(n) \; = \; \log q \int_0^\infty [s] q^{-s} ds \; = \; \sum_{n \in \mathbb{N}} q^{-n} \, .$$

3 Pkte.

4. Es sei $C = \{ \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{3^n} \mid a_n \in \{0, 2\} \text{ f.a. } n \in \mathbb{N} \} \subset [0, 1]$ die sogenannte Cantor-Menge.

a) *Zeige*: C ist kompakt, überabzählbar, hat keine innere Punkte, und ist eine Lebesgue-Nullmenge.*3 Pkte.*

b) **optional**: Welche Hausdorff-Dimension hat C? *4 Pkte.*

Bitten wenden!

5. zusätzliche Übungsklausuraufgabe, hier insgesamt 2 Pkte.:

a) Berechnen Sie das 4-dimensionale Volumen des Balles

$$B^4(r) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \}\,.$$

b) Es sei im Folgenden $v_n(r)$ das n-dimensionale Volumen des n-dimensionalen Balles vom Radius $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
Begründen Sie, warum es eine Konstante $c_n > 0$ gibt, die nur von der Dimension n abhängt, so daß

$$v_n(r) = c_n r^n \quad \text{für alle } \; r > 0,\, n \in \mathbb{N}\,.$$

c) Zeigen Sie

$$c_n = \frac{2\pi}{n} \cdot c_{n-2} \quad \text{für alle } \; n \geq 2,$$

mit $c_0 := 1$. (*Hinweis: Man berechne zuerst f_n mit $c_n = f_n c_{n-1}$ f.a. n.*)

6. zusätzliche Übungsklausuraufgabe, hier insgesamt 2 Pkte.: Sei eine geschlossene Kurve $\gamma\colon [0, a] \to \mathbb{R}^2$ ohne Selbstschnittpunkte in der oberen Halbebene in der Form

$$\gamma(u) = \big(f(u), g(u)\big), \quad g(u) > 0, \quad (f')^2 + (g')^2 = 1$$

für alle $0 \leq u \leq a$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Länge L der Kurve γ und eine Formel für den Schwerpunkt

$$S_\gamma = (x_\gamma, y_\gamma) = \big(1/L \int_\gamma x\, ds, 1/L \int_\gamma y\, ds\big)$$

von γ in den Ausdrücken f und g.

b) Es sei $F \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche, welche durch Rotation von γ um die x-Achse entsteht.
Zeigen Sie: Der Flächeninhalt von F ist gleich $2\pi y_\gamma L$,

7. zusätzliche Übungsklausuraufgabe, hier insgesamt 2 Pkte.:

a) Welche Dimension hat $\Lambda^3(\mathbb{R}^5)$? Begründen Sie!

b) Zeigen Sie, daß für $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ mit $\omega \wedge \omega \neq 0$ kein $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$ existiert, so daß $\alpha \wedge \omega = 0$.

c) Berechnen Sie $d(x^2 e^y dz - y \sin z\, dx + x^2 dy)$.

Rückgabe: In den Kasten am 05.01.10