Serie 1

1. Skizziere von folgender Funktion

- die Niveaulinien,
- die Gradientenflusstrajektorien,
- die kritischen Punkte,

und finde lokale Extrema und bestimme gegebenenfalls den Typ:

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)\,.$$

(4 Pkte)

2. Untersuche $f(x,y) = x(y-1)e^{-(x^2+y^2)}$ in $[0,\infty) \times [0,\infty)$ auf Extrema. (Achte auf die Randpunkte!) *(4 Pkte)*

3. Betrachte die folgende Menge von geschlossenen Kurven in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$:

$$X_N \;=\; \Big\{\, c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C} \,|\, c(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt},\; a_k \in \mathbb{C},\; k = -N, \ldots, 0, \ldots, N \,\Big\},$$

für ein festes $N \in \mathbb{N}$.

Betrachte für eine beliebige stetig differenzierbare, geschlossene Kurve $c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $c(0) = c(2\pi)$ mit $c(t) = x(t) + iy(t)$ die Ausdrücke

$$A(c) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y)dt \quad \text{und} \quad E(c) = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)dt\,.$$

Bestimme für die Funktionen $A\colon X_N \to \mathbb{R}$ und $E\colon X_N \to \mathbb{R}$ das Maximum von A unter der Nebenbedingung $E = 2\pi$. Welche Kurve $c \in X_N$ realisiert dieses bedingte Maximum? *(4 Pkte)*

4. Es sei $R = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$ eine gegebene Rechteckmenge und $\mathcal{R}(R)$ die Menge der auf R Riemann-integrierbaren beschränkten Funktionen. Zeige, daß $\mathcal{R}(R)$ ein reeller Vektorraum ist, und

$$f,g \in \mathcal{R}(R),\; \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(R)\,.$$

(4 Pkte)

Rückgabe: In den Kasten am 19.10.