Serie 8

1. Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

a) *Zeige*: Es existiert auf G ein Zweig des Logarithmus. *2 Punkte*

b) *Zeige*: Es existiert auf G ein Zweig der Wurzelfunktion, d.h. $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $\big(g(z)\big)^2 = z$ f.a. $z \in G$. *2 Punkte*.

2. a) *Zeige*: Jede komplexe Möbiustranformation $\varphi \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ lässt sich als eine endliche Komposition $\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n$ aus Transformationen φ_i vom Typ Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$, Translation $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$ und Drehstreckung $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}$ zusammensetzen. *2 Punkte*

b) *Zeige*: Die Gruppen $PSL(2, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ sind isomorph. *2 Punkte*

3. a) Es seien zwei Kreisbögen k_1 und k_2 in der komplexen Zahlenebene gegeben, so daß sich k_1 und k_2 in zwei Punkten schneiden, also ein sogenanntes Kreisbogenzweieck bilden. Finde eine konforme Abbildung, die das Innere dieses Zweiecks auf die obere Halbebene abbildet. *2 Punkte*

b) Finde eine konforme Abbildung des Gebiets $\{|z| < 1\}$ auf das Gebiet $\{\,\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ und bestimme auch die inverse Abbildung. *2 Punkte*

4. Es seien r paarweise verschiedene Punkte $z_1, \ldots, z_r \in \hat{\mathbb{C}}$ gegeben und es sei $G = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$. Bestimme $\mathrm{Aut}(G)$ explizit und vollständig für $r = 2, 3, 4$. *4 Punkte*

Rückgabe: In den Kasten am 03.06.

VII. 1. a $0 \notin G \subset \mathbb{C}^*$ einfach zusammenhängendes Gebiet $\Rightarrow$ $\forall \gamma : [0,1] \to G$ -geschlossener Integrationsweg gilt

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$$

Sei $z_0 \in G$ und $w_0 \in G$ mit $e^{w_0} = z_0$.
(z. B. nimm $w_0 = \ln|z_0| + i \operatorname{Arg} z_0$).
Sei $\gamma_{z_0 z} : [0,1] \to G$ ein I. Weg mit
$\gamma_{z_0 z}(0) = z_0$, $\gamma_{z_0 z}(1) = z$

Dann $\int_{\gamma_{z_0 z}} \frac{dz}{z}$ ist unabhängig von $\gamma_{z_0 z}$,
aber ~~nur von z~~. es hängt nur von z ab.
Definiere

$$\left(f(z) := \int_{\gamma_{z_0 z}} \frac{dz}{z} + w_0. \right) : G \to \mathbb{C}$$

Dann f ist holomorph und $f'(z) = \frac{1}{z}$.

<u>Z.z.</u> $e^{f(z)} = z \quad \forall z \in G$.

Sei G' ist ein zusammenhängt Komponente des Gebietes $\exp^{-1}(G)$.
Betrachte $g(w) := f(e^w) : G' \to \mathbb{C}$
Dann $g'(w) = \frac{1}{e^w} \cdot e^w = 1$
und $g(w_0) = f(e^{w_0}) = f(z_0) = w_0$
$\Rightarrow g(w) = w \quad \forall w \in G'$

Sei $z \in G$ und $w \in G'$ mit $e^w = z$.

Dann $e^{f(z)} = e^{f(e^w)} = e^{g(w)} = e^w = z$.

$\Rightarrow$ f ist ein holomorpher Zweig des Logarithmus.

<u>VIII.1.6</u> Sei $f : G \to \mathbb{C}$ wie oben.

Definiere $h(z) := e^{\frac{1}{2} f(z)} : G \to \mathbb{C}$

Dann $\left(h(z)\right)^2 = e^{f(z)} = z \quad \forall z \in G$.

VIII.2.a Sei H_a, T_b und $I \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

definiert durch

$$H_a(z) := az \qquad a \in \mathbb{C}^*$$

$$T_b(z) := z + b \qquad b \in \mathbb{C}$$

$$I(z) = \frac{1}{z}.$$

Sei $\varphi(z) := \dfrac{az+b}{cz+d} \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

Dann $ad - bc \neq 0$.

Fall 1: $c = 0 \Rightarrow d \neq 0$

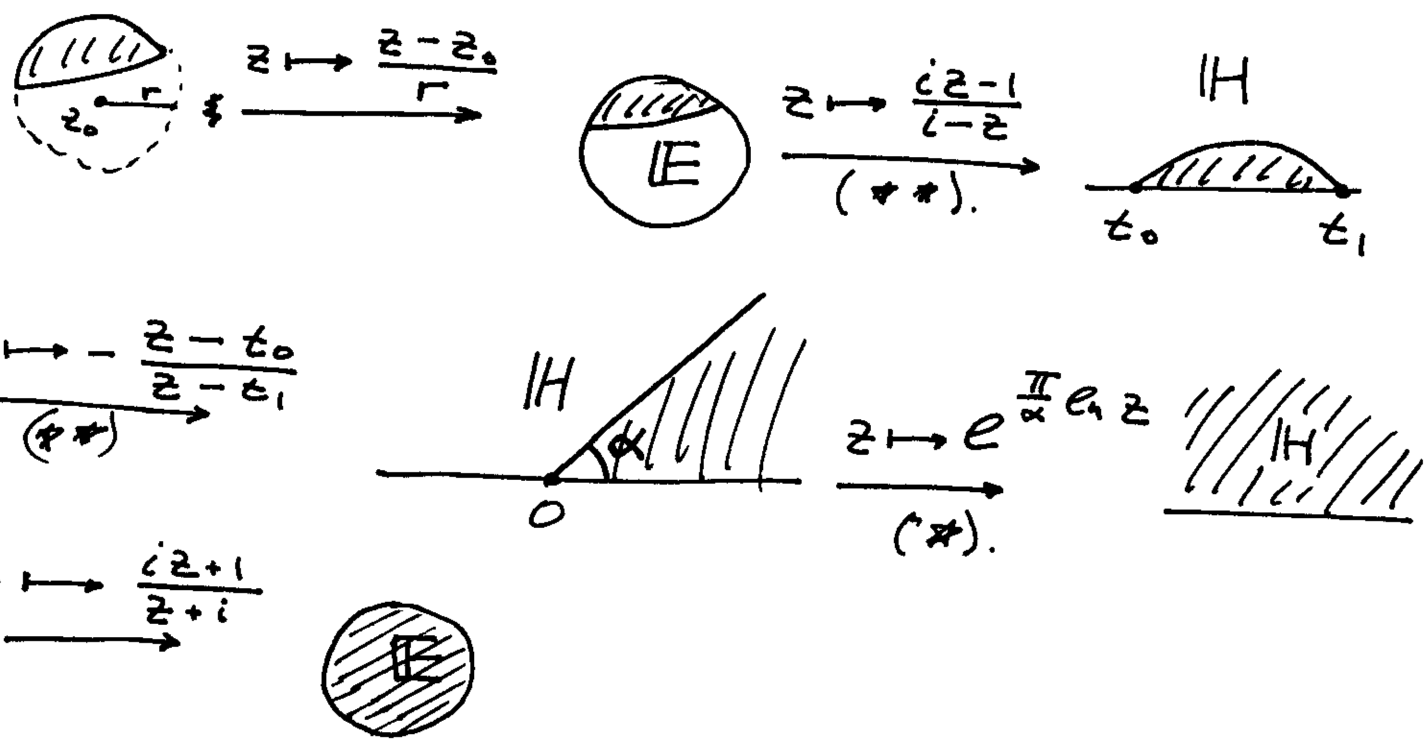
$$\varphi = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = T_{\frac{b}{d}} \circ H_{\frac{a}{d}}(z).$$

Fall 2: $c \neq 0 \Rightarrow$

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \quad \boxed{\left(b - \frac{ad}{c}\right) \neq 0}$$

$$= T_{\frac{a}{c}} \circ H_{b - \frac{ad}{c}} \circ I \circ T_d \circ H_c(z). \qquad \#$$

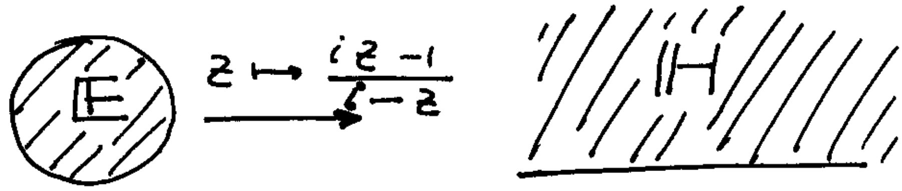
VIII. 3. a

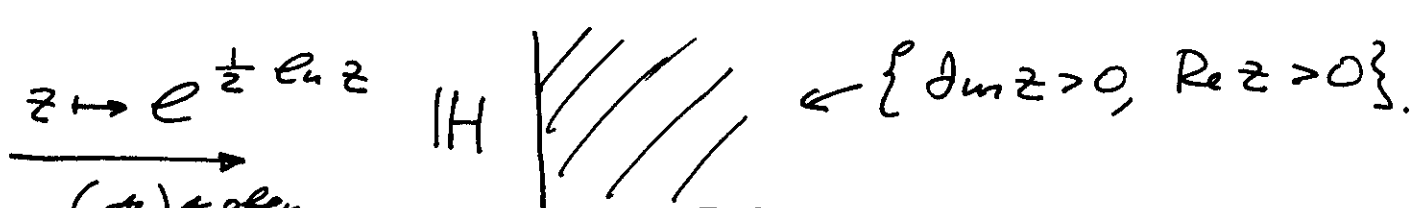


(*) Man nimmt einen stetigen Zweig des Log auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ mit $\ln(1) = 0$.
Dann $|e^{\lambda \ln z}| = |z|^\lambda$ und $\operatorname{Arg} e^{\lambda \ln z} = \lambda \operatorname{Arg} z$

(**) Die Bilde der Kreise und Geraden sind Kreise und Geraden.

VIII. 3. b





VIII. 4. $\varphi \in Aut(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, \dots, z_r\})$.

Hilfsatz: φ hat eine holomorphe Fortsetzung $\hat{\varphi} \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$. #

Beweis: Sei $1 \leq i \leq r$. φ hat eine isolierte Singularität in $z = z_i$.

Z.z. Es ist kein wesentliche Sing.

Falls Sing. ist wesentlich, dann $\varphi(\mathring{B}_\varepsilon(z_i))$ ist dicht in $\hat{\mathbb{C}}$ $\forall \varepsilon \ll 1$.

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi\left(B_{\varepsilon/3}\left(z_i + \frac{2\varepsilon}{3}\right)\right)}_{\text{offen nach Gebietstreu}} \cap \varphi(\mathring{B}_{\varepsilon/3}(z_i)) \neq \emptyset.$$

$\Rightarrow$ φ ist nicht injektiv. #.

Es folgt es gibt stetige Fortsetzung $\hat{\varphi} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Analog es gibt stetige Fortsetzung $\widehat{(\varphi^{-1})} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ und $\hat{\varphi} \circ \widehat{(\varphi^{-1})} = \widehat{(\varphi^{-1})} \circ \hat{\varphi} = id$.

$\Rightarrow \hat{\varphi} \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ #.

Sei $r = 2$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2\})$

Betrachte $\psi(z) := \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$

dann
$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*) &\to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2\}) \\ \varphi &\longmapsto \psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus der Gruppen.

Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$ dann

$\hat{\varphi}(0) \in \{0, \infty\}$.

<u>Fall 1.</u> $\hat{\varphi}(0) = 0 \Rightarrow \hat{\varphi}|_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \hat{\varphi}(z) = az$. $a \in \mathbb{C}^* \Rightarrow$

$\varphi(z) = az \qquad a \in \mathbb{C}^*$.

<u>Fall 2</u> $\hat{\varphi}(0) = \infty \Rightarrow \dfrac{1}{\hat{\varphi}}(0) = 0$.

$\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{\wedge} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \Rightarrow \dfrac{1}{\hat{\varphi}(z)} = az \Rightarrow$

$\varphi(z) = \dfrac{1}{az}$.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*) = \left\{ az, \frac{a}{z} \;\middle|\; a \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}) = \left\{ \psi\left(a\psi^{-1}(z)\right), \psi\left(\frac{a}{\psi^{-1}(z)}\right) \;\middle|\; a \in \mathbb{C}^*, \ \psi(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \right\}.$$

Sei $\mathfrak{r}=3$, $\varphi \in Aut(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\})$.

Betrachte $\psi_1(z) := \dfrac{z-z_1}{z-z_3}$, $\psi_2(z) = \dfrac{1}{\psi_1(z_2)} z$

und $\psi_3 = \psi_2 \circ \psi_1 : (z_1 \mapsto 0,\ z_2 \mapsto 1,\ z_3 \mapsto \infty)$

Dann $\Psi : Aut(\mathbb{C}^* \setminus \{1\}) \to Aut(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\})$

$$\varphi \longmapsto \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

ist ein Isomorphismus der Gruppen.

Betrachte ein Homomorphismus

$$R : Aut\{\mathbb{C}^* \setminus \{1\}\} \to S_3$$

$$R\varphi = \hat{\varphi}|_{\{0,1,\infty\}} : \{0, 1, \infty\} \circlearrowleft$$

<u>Z. z. R ist ein Isomorphismus.</u>

1. R ist surjektiv:

Betrachte $\varphi_1(z) := \frac{1}{z}$ und $\varphi_2(z) := 1-z$

Dann $R\varphi_1 = \begin{cases} 0 \mapsto \infty \\ 1 \mapsto 1 \\ \infty \mapsto 0 \end{cases}$ - Transposition

$R\varphi_2 = \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \\ \infty \mapsto \infty \end{cases}$ - Transposition

Da S_3 von jede zwei Transpositionen erzeugt, ist R surjektiv.

2. R ist injektiv

Sei $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \in Aut(\mathbb{C}^* \setminus \{1\})$

und $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(\infty)=\infty$

Sei $r=4$: Sei $z_1, \dots, z_4$ verschiedene Punkte.

Betrachte Doppelverhältnis der Punkte

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Sei D Klein Vierergruppe $\subset S_4$.

Man merkt dass für alle $\alpha \in D$.

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (z_{\alpha 1}, z_{\alpha 2}; z_{\alpha 3}, z_{\alpha 4}).$$

Also es gibt 6 ~~Möglichkeiten~~ verschiedene Möglichkeiten für Doppelverhältnis:

1.	$(z_1, z_2; z_3, z_4) = d$	$d = 2$,	$d = \frac{1}{2}$,	$d = -1$,	$d = e^{\frac{i\pi}{3}}$
2.	$(z_1, z_2; z_4, z_3) = \frac{1}{d}$	$\frac{1}{2}$	2	-1	$e^{\frac{-i\pi}{3}}$
3.	$(z_1, z_3; z_2, z_4) = 1-d$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$e^{-i\pi/3}$
4.	$(z_1, z_3; z_4, z_2) = \frac{1}{1-d}$	-1	2	$\frac{1}{2}$	$e^{i\pi/3}$
5.	$(z_1, z_4; z_3, z_2) = \frac{d}{d-1}$	2	-1	$\frac{1}{2}$	$e^{-i\pi/3}$
6.	$(z_1, z_4; z_2, z_3) = \frac{d-1}{d}$	$\frac{1}{2}$	-1	2	$e^{i\pi/3}$

1 $d = e^{-i\pi/3}$

2 $e^{i\pi/3}$

3 $e^{i\pi/3}$

4 $e^{-i\pi/3}$

5 $e^{i\pi/3}$

6 $e^{-i\pi/3}$

$d \notin \{2, \frac{1}{2}, -1, e^{\pm i\pi/3}\}$

alle verschiedene.

Sei $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\infty, 0, 1, w)$.

Then $(z_1, z_2; z_3, z_4) = w_0$

<u>Fall 1</u> $\quad w_0 \notin \{2, \frac{1}{2}, -1, e^{\pm i\pi/3}\}$.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty, w_0\}) \cong D \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$\| $$

$$\left\{ \frac{w_0}{z}, \frac{z - w_0}{z-1}, \frac{w_0 z - w_0}{z - w_0}, z \right\}.$$

<u>Fall 2</u> $\quad w_0 = -1$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty, -1\})$$

$$\|$$

$$\left\{ z, \frac{1}{z}, -z, \frac{-1}{z}, \frac{z+1}{z-1}, \frac{z-1}{z+1}, -\frac{z+1}{z-1}, -\frac{z-1}{z+1} \right\}$$

$$\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

<u>Fall 3, 4</u> $\quad w_0 = 2, \frac{1}{2}$ Analog.

$$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty, -1\}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

<u>Fall 5</u> $\quad w_0 = e^{i\pi/3}$.

$$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty, e^{i\pi/3}\}) \cong A_4.$$

$$\|$$

$$\left\langle \frac{1}{z}, 1 - z, \frac{z}{z-1} \right\rangle.$$