Serie 4

1. a) Sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von stetigen Funktionen, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ normal konvergent ist. Zeige, daß dann $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ gleichmäßig konvergiert. *(2 Punkte)*

b) (L) Bestimme bei den folgenden Funktionenfolgen, ob gleichmäßige Konvergenz auf dem angegebenen Definitionsereich vorliegt und gib die Limesfunktion an, wo möglich

1. $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, *(1 Pkt.)*
2. $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$, $x \geq 0$, *(1 Pkt.)*
3. $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $x \in [0,1]$, *(1 Pkt.)*

2. a) (L) Berechne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. *(2 Punkte)*

b) (L) Berechne $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$. *(2 Punkte)*

3. a) Sei $f \in C^0([a,b])$, $f \geq 0$ und $M = \max_{[a,b]} f$. *Zeige*: *(2 Punkte)*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b (f(x))^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = M\,.$$

b) Seien $f, g \in R([a,b])$. Beweise die Cauchy-Schwarz-Ungleichung *(2 Punkte)*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right).$$

4. (L) Zeige, daß das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert. *(2 Punkte)*

Rückgabe: Freitag, 08.05.09 in den Briefkästen