Serie 11

1. **a)** **(L)** Berechne für $f(x,y) = \sin xy$ im Punkt $(1,0)$ die Richtungsableitung in Richtung $v = (1/2, 1/2\sqrt{3})$ und ferner die Richtung in diesem Punkt, in der die Richtungsableitung $\partial_v f(1,0)$ maximal ist, sowie diesen maximalen Wert. *(2 Punkte)*

b) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ der Graph von $f(x,y) = xy$ und sei T die Tangentialebene im Punkt $(x_o, y_o, x_o y_o)$ von G. Bestimme die Ebenengleichung von T und zeige, daß $T \cap G$ aus zwei sich schneidenen Geraden besteht. *(2 Punkte)*

c) **(L)** Skizziere die Niveaulinien von $f(x,y) = x^{-3}y^2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

2. **(L)** Sei auf $\mathbb{R}^2_+ = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\,\}$ die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{y}{x^2}(y - x^2)$ für $0 < y < x^2$ und durch $f(x,y) = y - x^2$ für $x^2 \leq y$. Berechne die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ und zeige, daß diese in $\mathbb{R}^2_+$ stetig sind, also daß f in $\mathbb{R}^2_+$ stetig differenzierbar ist. *(3 Punkte)*

3. Die Funktion f aus Aufgabe 2 wird wie folgt zu einer wiede rmit f bezeichneten Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortgesetzt: Für $y < 0$ sei $f(x,y) = -f(x,-y)$ und es sei $f(x,0) = 0$.

a) **(L)** Begründe warum, f auch auch $\{\,(x,y) \,|\, y < 0\,\}$ stetig differenzierbar ist. *(1 Punkt)*

b) Zeige, daß f auch auf den Punkten der x-Achse differenzierbar ist, wobei das Differential $Df(x_o,0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch *(2 Punkte)*

$$Df(x_o,0)[(u,v)] = -v \text{ für } x_o \neq 0 \quad \text{und} \quad Df(x_o,0)[(u,v)] = v \text{ für } x_o = 0\,.$$

4. Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $g(x,y) = (x, f(x,y))$, wobei f die Funktion aus Aufgabe 3 ist. Zeige:

a) **(L)** g ist differenzierbar. *(1 Punkt)*

b) **(L)** Das Differential von g bei $(0,0)$ ist ein Isomorphismus. *(1 Punkt)*

c) **(L)** Es gibt keine Umgebung von $(0,0)$, die unter g bijektiv auf ihr Bild abgebildet wird. *(1 Punkt)*

d) **(L)** Vergleiche dies mit dem Umkehrsatz. Welche Voraussetzung des Umkehrsatzes ist hier nicht erfüllt? *(1 Punkt)*

Rückgabe: Montag, 29.06.09 in den Briefkästen