Zusatzserie

Alle nachfolgenden Aufgaben sind zur Wiederholung des bisherigen Stoffes und als freiwilliges Übungsangebot gedacht. Soweit bei einzelnen Aufgaben Punkte angegeben sind, werden bei korrekter Bearbeitung Punkte bis zu dieser Höhe vergeben, die außerhalb der erforderlichen Übungsserienpunkten zu den im regulärem Übungsbetrieb erreichten Punkten hinzugerechnet werden.

1. **a)** *Zeige*: Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein größtes Element.

b) Definiere das Supremum einer Menge von reellen Zahlen $A \subset \mathbb{R}$ und zeige die Eindeutigkeit von $\sup A$.

c) **2 Punkte** Bestimme $\sup_{n\in\mathbb{N}}(3 + \frac{(-1)^n}{n})$ und $\limsup_{n\in\mathbb{N}}(3 + \frac{(-1)^n}{n})$.

d) **2 Punkte** *Zeige*: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.

e) *Zeige*: $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt.

2. **a)** **3 Punkte** *Zeige*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren eindeutige $s, r_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $i \in \{1, 2\}$ mit $0 \leq r_s < 3^s$ und $n = i \cdot 3^s + r_s$.

b) **3 Punkte** *Zeige*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: 7 teilt $10^n - 3^n$.

c) *Zeige*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt: Falls $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 0$, so ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

d) *Zeige*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

e) *Beweise folgendes Induktionsprinzip*: Sei $P \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft $1 \in P$ und $\big[\{1, \ldots, n\} \subset P \Rightarrow n + 1 \in P\big]$. *Zeige*: Dann gilt $P = \mathbb{N}$.

3. **a)** Bestimme für folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt und berechne im Konvergenzfall den Grenzwert:

- **2 Punkte** $a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$
- $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
- $a_n = \frac{10^n}{n^{10}}$
- $a_n = \frac{10^n}{n!}$
- **2 Punkte** $a_{n+1} = a_n/2 + 2/a_n$
- $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.
- $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

Bitten wenden!

- **2 Punkte** $a_n = (1-1/2)(1-1/3)\cdot\ldots\cdot(1-1/n)$.
- $a_n = (\alpha^n + \beta^n + \gamma^n)^{\frac{1}{n}}$ mit $0 < \alpha \le \beta \le \gamma$.

b) Gib die Definition einer Cauchy-Folge reeller Zahlen und zeige: (a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge. Was kannst Du über die Gegenrichtung sagen?

c) *Zeige*: Eine monotone und beschränkte reelle Folge ist konvergent.

d) **3 Punkte** *Zeige*: Falls $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

4. a) Zeige direkt (ohne Verwendung von Wurzel-, Quotienten-, oder ähnlichen Kriterien), daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ absolut konvergiert, falls $|q| < 1$, und berechne den Grenzwert.

b) *Zeige*: **2 Punkte** Falls die Reihe $\sum |a_n - a_{n+1}|$ konvergiert, so auch die Folge (a_n).

c) Bestimme Konvergenz oder Divergenz folgender Reihen:

- $\sum n^2 e^{-n}$
- $\sum n^n e^{-n}$
- $\sum \frac{1}{n!}$
- $\sum a^n n^a$, mit $a > 0$,
- $\sum(\sqrt{1+n^2} - n)$
- $\sum(\frac{1}{3+(-1)^n})^n$
- $\sum \frac{\ln n}{n^2}$
- $\sum \frac{1}{x^n - y^n}$, $x > y > 0$,
- $\sum \frac{1}{n \ln n}$

d) **2 Punkte** Beweise folgende einfache Version des Quotientenkriteriums: Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $\sum a_n$ konvergiert.

5. **3 Punkte** Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beschränkte Umordnung, also eine bijektive Abbildung, so dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, mit $|f(n) - n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass jede Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{f(n)}$ konvergiert.

6. **2 Punkte** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen, sowie $c_n := a_n \cdot b_n$. (Also nicht das Cauchy-Produkt!) Zeige oder widerlege mit Hilfe eines Gegenbeispiels:

a) Wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergieren, dann konvergiert auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$.

b) Wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ konvergiert, dann konvergieren auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

c) Wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ absolut konvergieren, dann konvergiert auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ absolut.

d) Wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ absolut konvergiert, dann konvergieren auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ absolut.

7. **3 Punkte** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge positiver, reeller Zahlen mit

$$2a_n \le a_{n-1} + a_{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeige, dass dann die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+1} - a_n$ eine Nullfolge ist.

Bitte wenden!

8. **2 Punkte** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Nullfolge positiver, reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} < \varepsilon$$

Rückgabe: spätestens Dienstag, 13.01.09, 10.30 Uhr in den Briefkästen