Def. 1. *Es seien U eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $f, g\colon U\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ gegebene Funktionen. Dann schreiben wir*

$$f = o(g)$$

genau dann, wenn ein $\delta > 0$ existiert und ein $\varphi\colon \{\, z \in U \mid |z| < \delta \,\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \varphi(z)g(z) \quad \textit{und} \quad \lim_{z\to 0} \varphi(z) = 0\,.$$

Diese Funktion φ kann aufgefasst werden als eine beliebige Funktion $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(0) = 0$ und stetig in 0. Man kann $o(g)$ auch als die Menge aller Funktionen der Form

$$o(g) = \{\, \varphi(z)g(z) \mid \varphi \text{ wie oben} \,\}$$

auffassen.

Lemma 1. *Es gilt*

a) $o(z^n) + o(z^m) = o(z^m)$ *für alle* $m \leq n \in \mathbb{N}_0$.
b) $o(az^n + o(z^n)) = o(z^n)$*, für alle* $a \in \mathbb{C}$*,* $n \in \mathbb{N}_0$.
c) $o(o(1)) \neq o(z)$.

Beweis. **a)** Betrachte $f(z) = \varphi(z)z^n + \psi(z)z^m$ mit $\lim_{z\to 0} \phi(z) = \lim_{z\to 0} \psi(z) = 0$ und $n = m + k$, $k \geq 0$. Dann folgt

$$f(z) \;=\; \bigl(\varphi(z)z^k + \psi(z)\bigr) \cdot z^m,$$

und somit $f(z) = o(z^m)$ aufgrund der Grenzwertsätze.

b) Sei $f(z) = o(az^n + o(z^n))$. Es seien also $\varphi_1, \varphi_2\colon U(0) \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $\lim_{z\to 0} \varphi_i(z) = 0$ für $1, 2$ und

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi_1(z) \cdot (az^n + \varphi_2(z)z^n) \\ &= \varphi_1(z)(a + \varphi_2(z)) \cdot z^n, \end{aligned}$$

also gilt $f \in o(z^n)$.

c) Betrachte zum Beispiel $f(z) = |z|^{\frac{1}{3}}|z|^{\frac{1}{3}} = o(o(1))$. Wegen $\frac{f(z)}{|z|} = |z|^{-\frac{1}{3}} \to \infty$ für $z \to 0$ gilt aber $f(z) \neq o(z)$. ☐