Klausur

Name: Studiengang:

Matr.-Nr.: Modul-Prüfung: ja ☐ nein ☐

Es dürfen **keine** Hilfsmittel (Taschenrechner, Skript, Buch, Notizen, etc.) verwendet werden.

Endergebnisse, Lösungswege und getroffene Aussagen sollten formuliert werden.

---

1. Betrachten Sie die Menge $M := \left\{ x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} \leq 2 \right\}$. Untersuchen Sie die Menge auf Existenz von Minimum, Maximum, Supremum und Infimum. Geben Sie im Falle der Existenz die entsprechenden Werte an und beweisen Sie, dass diese Werte die richtigen sind. *(7 Punkte)*

2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$. *(4 Punkte)*

3. Bestimmen Sie für folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt, und berechnen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert:

- $a_n = \frac{(5n-3)(2n+2)(n-1)}{(4n+2)^2(n+1)}$. *(2 Punkte)*
- $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3} - n^2$. *(2 Punkte)*
- $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. *(2 Punkte)*

4. Geben Sie die Definition einer Cauchy-Folge reeller Zahlen, und zeigen Sie: (a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist eine Cauchy-Folge. Was können Sie über die Gegenrichtung sagen? *(5 Punkte)*

5. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n}$ auf Konvergenz. *(4 Punkte)*

6. Bestimmen Sie diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^3}$ konvergiert. *(6 Punkte)*

Bitten wenden!

7. Ist die Funktion $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig fortsetzbar nach 0? *(4 Punkte)*

8. Es sei für $x \in \mathbb{R}$

$$f_c(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ c, & x = 0\,. \end{cases}$$

a) Sei $c \in \mathbb{R}$, so daß f_c stetig ist auf $\mathbb{R}$. Ist f_c differenzierbar in $x = 0$? Begründen Sie! *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie $f_c'(x)$ für $x \neq 0$. *(2 Punkte)*

Hier endet der Teil der Klausur, der für die Modul-Prüfung zu bearbeiten ist.
Die nachfolgenden Aufgaben sind für den Schein für die Diplomstudiengänge zusätzlich zu bearbeiten.
Optional können diese auch für die Modulprüfung bearbeitet werden und geben dabei Zusatzpunkte.

---

9. *Zeigen Sie*: $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt. Verwenden sie nur die Axiome der natürlichen Zahlen und eine Form des Vollständigkeitsaxiom. *(3 Punkte)*

10. *Zeigen Sie*: Falls die Reihe $\sum |a_n - a_{n+1}|$ konvergiert, so auch die Folge (a_n). *(4 Punkte)*

11. Betrachten Sie wieder f_c aus Aufgabe 8. mit $c \in \mathbb{R}$, so daß f_c stetig ist auf $\mathbb{R}$. Hat $f_c' \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung nach 0? *(2 Punkte)*

12. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bei 0 und $f(0) = 0$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie*: Dann ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$. *(5 Punkte)*

Hinweise: Es gilt: $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{und} \quad \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Viel Glück!

---

bitte freilassen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$

(Modul-Pr. $\sum$ aus 42, Schein-Klausur $\sum$ aus 56)