Hinweise zu Serie 8

1.

2. Was den Logarithmus anbetrifft, dürfen Sie verwenden, daß $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton gegen ∞ divergiert und daß $n > \ln n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Anstatt letzterem genügt eigentlich schon $n > \ln n$ f.a. $n \geq n_o$ für irgendein $n_o \in \mathbb{N}$ und dies folgt aus $n^{\frac{1}{n}} \to 1$, wenn man benutzt, daß $\ln x$ die Umkehrfunktion von e^x ist.)

3. Beachten Sie die korrigierte Fassung der Aufgabe.

4. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. und $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-bilineare, symmetrische und positive Abbildung, d.h.:

$$\begin{aligned}
&\langle v+v', w\rangle \;=\; \langle v,w\rangle + \langle v',w\rangle \quad \text{f.a. } v,v',w \in V,\\
&\langle \lambda v, w\rangle \;=\; \lambda\langle v,w\rangle \quad \text{f.a. } v,w \in V,\ \lambda \in \mathbb{R},\\
&\langle v,w\rangle \;=\; \langle w,v\rangle, \quad \text{f.a. } v,w \in V,\\
&\langle v,v\rangle > 0 \quad \text{f.a. } v \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Dann gilt mit der Notation $|v|^2 = \langle v,v\rangle$:

$$0 \leq |v-\lambda w|^2 \;=\; |v|^2 - 2\lambda\langle v,w\rangle + \lambda^2|w|^2\,.$$

Falls nun $w \neq 0$, so setze $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{|w|^2}$ und erhalte

$$|v|^2 - 2\frac{\langle v,w\rangle^2}{|w|^2} + \frac{\langle v,w\rangle^2}{|w|^2} \geq 0,$$

also

$$\langle v,w\rangle \;\leq\; |v|^2|w|^2\,.$$