Serie 8

1. (*2 Punkte*) Es sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge von nicht-negativen reellen Zahlen. *Zeige:* Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \;=\; a_1 - a_2 + a_3 \pm \dots$$

konvergent. (*Hinweis: Dies ist das sogenannte Leibniz-Kriterium. Übertrage den Beweis der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe.*)

2. Untersuche auf Konvergenz: (*je 1 Punkt*)

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^9}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+4n}$

3. **a)** *Zeige (2 Punkte)*: Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ absolut konvergiert.

b) *optional (2 Punkte)*: Finde ein Gegenbeispiel zu a), wenn auf beiden Seiten das Adverb 'absolut' weggelassen wird.

4. **a)** (*2 Punkte*) Es seien $\sum |a_n|^2$ und $\sum |b_n|^2$ konvergente Reihen. *Zeige*:
Die Reihe $\sum a_n b_n$ konvergiert absolut und es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\Big| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2} .$$

b) (*1 Punkt*) Falls $\sum |a_n|^2$ konvergiert, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ absolut.

Rückgabe: spätestens Dienstag, 09.12.08, 10.30 Uhr in den Briefkästen