Serie 7

1. Berechne $\sup$, $\inf$, $\lim$, $\liminf$, $\limsup$ sofern wohldefiniert für folgende Folgen (*je 1 Pkt.*):

a) $(-1)^n(1-\frac{1}{n})$.

b) $\sqrt{n+1}+(-1)^n\sqrt{n}$.

c) $a_n = \sqrt[n]{2}+(-1-\frac{1}{n})^n$.

d) $|1-2^{\frac{1}{n}}\cdot i^n|$.

2. **a)** (*1 Pkt*) Gibt es eine Folge, deren Häufungspunkte genau die positiven reellen Zahlen sind? Begründe oder gib eine an.

b) (*1 Pkt*) Konstruiere eine Folge (a_n) mit $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$.

c) (*1 Pkt*) Sei (a_n) beschränkt und $a_n < \sup a_n$ für alle n. *Zeige*: $\sup a_n = \limsup a_n$.

3. **a)** *Zeige (2 Punkte)*: Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (X,d) ist eine Cauchy-Folge $\Longleftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $d(a_{n+k}, a_n) < \varepsilon$.

b) *Zeige (2 Punkte)*: Der metrische Raum $(\mathbb{C}, d)$ mit $d(z,z') = |z-z'|$ ist vollständig.

4. **a)** (*2 Pkte*) Es sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine unterhalb beschränkte Folge. *Zeige:* Der Limes Inferior $\liminf a_n$ existiert und ist gleich α genau dann, wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele Folgenglieder a_n mit $a_n < \alpha+\varepsilon$ und nur endlich viele Folgenglieder mit $a_n < \alpha-\varepsilon$. (***Dies ist der Beweis von Satz II.4.5 (a).***)

b) (*2 Pkte*)E s seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen. *Zeige:*

$$\limsup(a_n+b_n) \geq \limsup a_n + \liminf b_n \,.$$

Rückgabe: spätestens Dienstag, 02.12.08, 10.30 Uhr in den Briefkästen