Serie 3

1. *(4 Punkte)*

a) Zeige ausführlich mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}: \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{m} b_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j\,.$$

b) Zeige f.a. $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}\,.$$

c) Zeige durch vollständige Induktion für die Mengen $K = \{1, \ldots, k\}$ und $N = \{1, \ldots, n\}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$, daß gilt

$$\# N^K = n^k,$$

(zur Erinnerung: N^K bezeichnet die Menge aller Abbildungen $f\colon K \to N$.)

d) Beweise: $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \ldots \cdot (1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für $x \neq 1$.

2. **a)** *(1 Punkt)* Zeige: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ und jede Abbildung $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ gibt es zwei verschiedene $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $f(n_1) = f(n_2)$. (Dies heißt das *Schubfachprinzip*.)

b) *(2 Punkt)* Zeige mit dem Schubfachprinzip, daß für jede Permutation, d.h. Bijektion $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ das Produkt $(f(1)-1)(f(2)-2) \cdot \ldots \cdot (f(n)-n)$ gerade ist, falls $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist.

3. *(4 Punkte)* Definiere rekursiv folgende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $u_1 = u_2 = 1$ und $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ fa. $n \geq 2$. Diese Folge heißt die **Fibonacci-Folge**.
Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die zwei Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Es spielt im Folgenden keine Rolle, welche Werte diese Zahlen haben, außer daß $\alpha \neq \beta$ und $\alpha \geq 1$. Zeige f.a. $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^{n} u_i = u_{n+2} - 1$,

b) $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u_n u_{n+1}$,

c) $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$,

d) $\alpha^{n-2} \leq u_n \leq \alpha^{n-1}$.

Bitten wenden!

4. a) *(2 Punkte)* Zeige, daß der Ausdruck

$$d\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ definiert.

b) *(2 Punkte)* Finde (sofern es existiert) Infimum, Supremum, Minimum und Maximum von

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(-1+\tfrac{1}{n}, 2+\tfrac{1}{n}\big) \quad \text{und} \qquad \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(-1+\tfrac{1}{n}, 2+\tfrac{1}{n}\big)\,.$$

Rückgabe: spätestens Dienstag, 04.11.08, 10.30 Uhr in den Briefkästen