Serie 2

1. *(2 Punkte)* Es sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Aussagen, welche folgende Eigenschaft hat:

(a) P_1 ist wahr,

(b) Falls alle P_k für $1 \leq k \leq n$ wahr sind, so auch P_{n+1}.

Zeige: Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage P_n wahr.

2. Beweise ohne Verwendung der Binomialformel:

a) *(2 Punkte)* Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

b) *(2 Punkte)* Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $x \neq 0$ gilt $(1+x)^n > 1 + nx$.

3. Sei $A_n = \{\, k \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq k \leq n \,\}$.

a) *(2 Punkte)* Zeige (durch Induktion): $f\colon A_n \to A_n$ injektiv $\Rightarrow$ f ist bijektiv.

b) *(2 Punkte)* Zeige: $f\colon A_n \to A_m$ bijektiv $\Rightarrow n = m$.
Hinweis: Fallunterscheidung, Fall $n > m$: betrachte Inklusionsabb.
$i\colon A_m \to A_n$, $i(k) = k$ und die Komposition $i \circ f\colon A_n \to A_n$.

4. *(5 Punkte)* Gegeben zwei Teilmengen $A, B \in \mathbb{R}$, definiere $-A := \{-a \,|\, a \in A\}$ und

$$A + B := \{\, a + b \,|\, a \in A,\, b \in B \,\}, \quad A \cdot B := \{\, a \cdot b \,|\, a \in A,\, b \in B \,\}.$$

Beweise oder widerlege:

(a) $\sup(-A) = -\inf A$
(b) $\sup(-A) = -\sup A$
(c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
(d) $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$
(e) $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$
(f) $A \subseteq B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$
(g) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$
(h) $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.

Rückgabe: Dienstag, 28.10.08 in den Briefkästen