Serie 12

1. **a)** *(1 Punkt)* Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion auf einer Umgebung D von 0 in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. *Zeige*: $f(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$.

b) *(3 Punkte)* Es sei nun $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer Umgebung D von 0 in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $f(0) \neq 0$. *Zeige:*

$$\frac{1}{f(x) + o(x^n)} = \frac{1}{f(x)} + o(x^n)\,.$$

c) *(1 Punkt)* Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ definiert auf einer Umgebung von x_o in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. *Zeige*: Wenn $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ existiert, so ist f differenzierbar in x_o.

2. Finde stetige Fortsetzungen für folgende Funktionen *(je 1 Punkt)*:

a) $f(x) = x \sin 1/x$, $x \neq 0$,

b) $f(x) = \frac{\sin(\sin x)}{x}$, $x \neq 0$,

c) $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$, $x \neq 0$

.

3. Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \text{f.a. } z \in \mathbb{C}\,.$$

a) *(2 Punkte)* Stelle $\sinh z$, $\cosh z$ als Potenzreihen dar.

b) *(2 Punkte)* Zeige:

$$\cosh z = \cos iz, \sinh z = -i \sin iz,$$
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$
$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w,$$
$$\sinh(z+w) = \ldots \text{(finde analoge Formel)}$$

4. Sei $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Bestimme die Ableitungen der Funktionen *(je 1 Punkt)*:

a) $f(1 + x^2)$,

b) $f(f(f(f(3x+4))))$

c) $\frac{1}{f(\frac{1}{x})} + f(\frac{1}{x})$.

Rückgabe: spätestens Donnerstag, 22.01.09, 10.30 Uhr in den Briefkästen