Serie 11

1. **a)** (*1 Punkt*) Zeige, daß die Funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z-\bar{z}^2}{|z|^q}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ stetig ist, wobei $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) (*2 Punkte*) Für welche $q \in \mathbb{Q}$ existiert eine stetige Fortsetzung von f nach $\mathbb{C}$?

2. Die folgenden Funktionen seien nur für reelle x betrachtet:

a) (*1 Punkt*) Berechne $\lim_{x\downarrow 0} \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$ und $\lim_{x\uparrow 0} \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$.

b) (*1 Punkt*) Berechne $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)$.

c) (*2 Punkte*) Bestimme $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x}-\sqrt{x+1})$ und $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

3. **a)** (*2 Punkte*) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für alle rationalen Zahlen $r \in I \cap \mathbb{Q}$ gelte $f(x) = g(x)$. *Zeige*: Dann ist $f(x) = g(x)$.

b) (*2 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Zeige*: Dann existiert eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. **a)** (*2 Punkte*) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. *Zeige*: Die Wertemenge $f\big([a,b]\big)$ ist entweder ein Punkt (d.h. $f = \text{const}$) oder ein abgeschlossenes Intervall.

b) (*2 Punkte*) Es gelte nun zudem $f\big([a,b]\big) \subseteq [a,b]$. *Zeige*: Es existiert ein Fixpunkt $x_o \in [a,b]$ von f, d.h. $f(x_o) = x_o$.

Rückgabe: spätestens Donnerstag, 15.01.09, 10.30 Uhr in den Briefkästen