Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Implizites Euler-Verfahren zur Lösung von nichtlinearen differentiell-algebraischen Gleichungen.

Aufgabenstellung

Gegeben sei eine differentiell-algebraische Gleichung der Form

$$F_1(t, x, \dot{x}) = 0, \quad F_2(t, x) = 0$$

mit $F_1 \in C([t_0, T] \times \mathbb{D}_x \times \mathbb{D}_{\dot{x}}, \mathbb{R}^d)$ und $F_2 \in C([t_0, T] \times \mathbb{D}_x, \mathbb{R}^a)$, wobei $\mathbb{D}_x, \mathbb{D}_{\dot{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $a + d = n$. Im folgenden sollen F_1, F_2 hinreichend glatt sein. Außerdem soll für alle $(t, x, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{D}_x \times \mathbb{D}_{\dot{x}}$ folgendes gelten. Es ist $\operatorname{rang} F_{2;x}(t, x) = a$ und für $K \in \mathbb{R}^{n,d}$ mit $\operatorname{rang} K = d$ und $F_{2;x}(t, x)K = 0$ ist $\operatorname{rang} F_{1;\dot{x}}(t, x, y)K = d$.
Eine Funktion $x \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ heißt Lösung dieser Gleichung, wenn sie diese punktweise erfüllt. Bei einem zugehörigen Anfangswertproblem fordert man noch

$$x(t_0) = x_0$$

für ein gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Man beachte, daß für die Existenz einer solchen Lösung zwingend $F_2(t_0, x_0) = 0$ gelten muß.
Zur numerischen Lösung eines solchen Anfangswertproblems kann man das Intervall $[t_0, T]$ äquidistant unterteilen gemäß

$$t_i = t_0 + ih, \quad h = (T - t_0)/N$$

und die differentiell-algebraische Gleichung entsprechend

$$\begin{aligned} &F_1(t_{i+1}, x_{i+1}, \tfrac{1}{h}(x_{i+1} - x_i)) = 0, \\ &F_2(t_{i+1}, x_{i+1}) = 0 \end{aligned}$$

mit dem sogenannten impliziten Euler-Verfahren diskretisieren.
Man implementiere das so gegebene implizite Euler-Verfahren. Die anfallenden nichtlinearen Gleichungssysteme zur Berechnung von x_{i+1} löse man mit dem Newton-Verfahren, wobei man die benötigten Jacobi-Matrizen mit einem Differenzenverfahren approximiere.
Als Testbeispiel verwende man

$$\begin{aligned} &(1 - x_1)\dot{x}_2 - c(1 - x_2)\dot{x}_1 + cx_2(1 - x_1)^2 + cx_1(1 - x_2)^2 = 0, \\ &c(x_1 - \log x_1) + (x_2 - \log x_2) - z = 0, \end{aligned}$$

mit $c = 1$, $x_1(0) = x_2(0) = 2$, $T = 10$ und passendem z, sowie eine Reihe selbst gewählter Probleme.

Quellen

$\emptyset$