Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Bestimmung des Spektrums einer symmetrischen Matrix mittels Transformation auf Tridiagonalgestalt und Verwendung Sturmscher Ketten.

Aufgabenstellung

Zur numerischen Bestimmung des Spektrums einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ kann man folgendermaßen vorgehen. Es gibt es eine Householder-Transformation P derart, daß

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \end{array}\right]$$

mit $a^T = [\, a_{12} \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \,]$ und symmetrischem $\tilde{A}$. Man kann nun mit $\tilde{A}$ statt A fortfahren und erhält so induktiv eine symmetrische Tridiagonalmatrix T, die zu A ähnlich ist und damit die gleichen Eigenwerte wie A besitzt.
Bezeichnet man die Diagonalelemente von T mit $d_1, \ldots, d_n$ und die Nebendiagonalelemente von T mit $e_1, \ldots, e_{n-1}$, so liefert die Rekursion

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = d_1 - \lambda, \quad p_i(\lambda) = (d_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - e_{i-1}^2 p_{i-2}(\lambda), \; i = 2, \ldots, n$$

eine (abbrechende) Folge von Polynomen $p_i \in \Pi_i$, $i = 0, \ldots, n$, mit

$$p_n(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

Wählt man nun ein $\mu \in \mathbb{R}$ und bildet die (abbrechende) Folge

$$\{p_0(\mu), p_1(\mu), \ldots, p_n(\mu)\},$$

so liefert die Anzahl der Vorzeichenwechsel in dieser Folge die Anzahl der Eigenwerte von A, die strikt kleiner als μ sind, mit der Konvention, daß $p_i(\mu)$ entgegengesetztes Vorzeichen von $p_{i-1}(\mu)$ hat, wenn $p_i(\mu) = 0$ ist.
Ausgehend davon, daß alle Eigenwerte von A in einem Intervall $[-M, M]$, etwa mit $M = \|A\|_\infty$, liegen, entwickle und implementiere man einen Algorithmus, der auf der Basis obiger Folgen alle Eigenwerte von A liefert. Man teste die Implementierung an einer Reihe von Matrizen unterschiedlicher Größe.

Quellen

$\emptyset$