Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Bestimmung des Spektrums einer symmetrischen Matrix mit Hilfe des Jacobi-Verfahrens.

Aufgabenstellung

Zur numerischen Bestimmung des Spektrums einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ kann man folgendermaßen vorgehen. Man wählt nach einer gewissen Strategie ein Element a_{kl} von A aus. Ist $a_{kl} = 0$, so setzt man $\hat{A} = A$. Andernfalls setzt man $\hat{A} = \Omega A \Omega^T$, wobei Ω eine Givens-Rotation gegeben durch

$$\hat{z} = \Omega z \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{z}_i = \begin{cases} z_i & \text{für } i \neq k, l, \\ cz_k + sz_l & \text{für } i = k, \\ -sz_k + cz_l & \text{für } i = l, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

mit $c^2 + s^2 = 1$ ist. Dabei wählt man die Parameter c und s entsprechend

$$\begin{aligned} r &= \frac{a_{kk} - a_{ll}}{2a_{kl}}, \\ t &= \frac{\operatorname{sign}(r)}{|r| + \sqrt{1 + r^2}}, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad s = ct. \end{aligned}$$

Danach übernimmt $\hat{A}$ die Rolle von A und man iteriert, bis die Außerdiagonalelemente betragsmäßig unterhalt einer vorgegebenen Toleranzgrenze liegen.
Als Auswahlstrategie für die Wahl von a_{kl} kann man ein betragsgrößtes Außerdiagonalelement nehmen (sogenanntes klassisches Jacobi-Verfahren) oder in der sogenannten zyklischen Form in einer vorgegebenen Reihenfolge durch die Einträge des strikten oberen Dreiecks der Matrix laufen.
Man schreibe ein Programm, das zu gegebenem symmetrischem A wie oben angegeben sowohl in der klassischen Form wie auch in einer zyklischen Form die zugehörigen Eigenwerte bestimmt, und teste es an einer Reihe von Matrizen unterschiedlicher Größe.

Quellen

$\emptyset$