

Arbeitsblatt
Numerisches Praktikum

Thema

Tangentenhomotopie mit fester Schrittweite.

Aufgabenstellung

Gegeben sei das Problem

$$f(x) = 0$$

mit $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt. Gilt $\text{rank } f_x(x) = n$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x) = 0$ und kennt man ein $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x_0) = 0$, so kann man nach dem Satz über implizite Funktionen die zugehörige Lösungsmenge in einer Umgebung von x_0 als Graphen einer Funktion in einer Variablen auffassen. Dabei ist $t_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$f_x(x_0)t_0 = 0, \quad t_0^T t_0 = 1$$

die Richtung der zu x_0 gehörigen Tangenten an diesen Graphen. Man kann sich jetzt mit folgender Herangehensweise sukzessive Punkte in der Menge $f^{-1}(\{0\})$ verschaffen. Zu gegebener (fester) Schrittweite σ setzt man

$$\hat{x}_1^0 = x_0 + \sigma t_0$$

und löst das Problem $F(x) = 0$ gegeben durch

$$f(x) = 0, \quad t_0^T(x - \hat{x}_1^0) = 0$$

mit Hilfe des Newton-Verfahrens

$$\hat{x}_1^{\nu+1} = \hat{x}_1^\nu - F_x(\hat{x}_1^\nu)^{-1}F(\hat{x}_1^\nu).$$

Dieses konvergiert für hinreichend kleinen Betrag von σ . Bezeichnet man den zugehörigen Grenzwert mit x_1 , so kann man die beschriebene Vorgehensweise mit x_1 statt x_0 fortsetzen. Dabei ist das zugehörige t_1 so zu wählen, daß $t_0^T t_1 > 0$ ist.

Man implementiere das beschriebene Verfahren und teste es an

$$\begin{aligned}(x_1 - x_3)/10000 + (x_1 - x_2)/39 + (x_1 - x_7)/51 &= 0, \\(x_2 - x_6)/10 + (x_2 - x_1)/39 + 5.6 \cdot 10^{-8}(\exp(25x_2) - 1) &= 0, \\(x_3 - x_1)/10000 + (x_3 - x_4)/25.5 &= 0, \\(x_4 - x_3)/25.5 + (x_4 - x_5) + x_4/0.62 &= 0, \\(x_5 - x_6)/13 + (x_5 - x_4) + 5.6 \cdot 10^{-8}(\exp(25x_5) - 1) &= 0, \\(x_6 - x_2)/10 + (x_6 - x_5)/13 + (x_6 - 7.65 \operatorname{atan}(1962(x_3 - x_1)))/0.201 &= 0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}x_5(1 - x_3)v_1 - x_3 &= 0, \\22x_5(1 - x_3)v_1 - 30x_1 &= 0, & v_1 &= \exp(10x_1/(1 + 0.01x_1)), \\x_3 - x_4 + x_5(1 - x_4)v_2 &= 0, & v_2 &= \exp(10x_2/(1 + 0.01x_2)). \\10x_1 - 30x_2 + 22x_5(1 - x_4)v_2 &= 0,\end{aligned}$$

Dabei achte man bei der Wahl von σ (einschließlich des Vorzeichens) und der Zahl der durchzuführenden Schritte, daß man ausgehend von x_0 den Graphen in beide Richtungen so weit bestimmt, daß die wesentlichen Eigenschaften des Graphen erfaßt werden.

Quellen

\emptyset