Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Vergleich zweier Verfahren zum Fitten von Punkten mittels einer Kugel.

Aufgabenstellung

Die Punkte (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, n$, mit $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$ sollen bestmöglich durch eine Kugel approximiert werden. Eine Kugel in allgemeiner Lage wird beschrieben durch die Menge der Lösungen (x, y, z) der skalaren Gleichung $f(x, y, z; r, x_0, y_0, z_0) = 0$ gegeben durch

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Dabei bezeichnet r den Radius und (x_0, y_0, z_0) die Koordinaten des Mittelpunkts. Gesucht ist nun eine Kugel mit

$$\|F(r, x_0, y_0, z_0)\|_2 = \min!,$$

wobei

$$F_i(r, x_0, y_0, z_0) = f(x_i, y_i, z_i; r, x_0, y_0, z_0), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Das so entstehende nichtlineare Ausgleichsproblem der Form $\|F(w)\|_2 = \min!$ kann mit dem sogenannten Gauß-Newton-Verfahren

$$w^{m+1} = w^m + \Delta w^m, \quad \|F(w^m) + F_w(w^m)\Delta w^m\|_2 = \min!$$

bestimmt werden.
Man implementiere das Gauß-Newton-Verfahren, indem man das in jedem Iterationsschritt anfallende lineare Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung löst. Außerdem implementiere man das in

Späth: Least-Square Fitting with Spheres, J. Optim. Theory Appl. 96, 191-199 (1998)

beschriebene Verfahren. Man vergleiche die beiden Verfahren anhand einer Reihe von Beispielen.

Quellen

$\emptyset$