Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Konvergenzordnung bei quadratischer und kubischer Hermite-Interpolation.

Aufgabenstellung

Man schreibe ein Unterprogramm, das zu einer Funktion $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ die quadratische bzw. kubischer Hermite-Interpolierende s_h zu den Stützstellen

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \quad t_i = t_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

berechnet. Dabei sind diese definiert durch

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & s_i = s_h|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \Pi_2, & i = 0,\dots,n-1, \\ \text{(b)} & s_h(t_i) = f(t_i), & i = 0,\dots,n, \\ \text{(c)} & \dot{s}_i(t_i + \theta h) = \dot{f}(t_i + \theta h), & i = 0,\dots,n-1 \end{array}$$

mit festem $\theta \in [0,1]$ bzw. durch

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & s_i = s_h|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \Pi_3, & i = 0,\dots,n-1, \\ \text{(b)} & s_h(t_i) = f(t_i), & i = 0,\dots,n, \\ \text{(c)} & \dot{s}_h(t_i) = \dot{f}(t_i), & i = 0,\dots,n. \end{array}$$

Weiterhin schreibe man ein Unterprogramm, mit dem man s_h sowie dessen Ableitungen $\dot{s}_h$ und $\ddot{s}_h$ an einer vorgegebenen Stelle t auswerten kann. Ist der Wert nicht definiert, so ersetze man ihn durch das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes. Zu gegebenem f kann man sich dann durch

$$E_{h,k} = \|s_h^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \approx \max_{j=0,\dots,10n} |s_h^{(k)}(\tau_j) - f^{(k)}(\tau_j)|, \quad \tau_j = t_0 + j\frac{h}{10}, \quad k = 0,1,2,$$

Schätzungen für die Fehler $E_{h,k}$ verschaffen. Mit dem Ansatz

$$E_{h,k} \doteq C_k h^{p_k}$$

kann man durch Vergleich zweier Schätzungen gemäß

$$E_{h_1,k} \doteq C_k h_1^{p_k}, \quad E_{h_2,k} \doteq C_k h_2^{p_k}$$

bzw.

$$p_k \doteq \frac{\log E_{h_1,k} - \log E_{h_2,k}}{\log h_1 - \log h_2}$$

schließlich Konvergenzordnungen p_k schätzen. Man bestimme solche Schätzungen für

$$\begin{array}{llll} f(t) = \sin t & \text{auf } [-\pi, \pi], & f(t) = \cos t & \text{auf } [-\pi, \pi], \\ f(t) = \frac{1}{3}|t| \sin^2 t & \text{auf } [-\pi, \pi], & f(t) = \sqrt{t} & \text{auf } [1, 2], \\ f(t) = \exp t & \text{auf } [-1, 1], & f(t) = (1 + t^2)^{-1} & \text{auf } [-1, 1] \end{array}$$

durch sukzessives Halbieren der Schrittweite h.

Quellen

$\emptyset$