Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Bestimmung von Orthonormalbasen von Kern und Cobild einer Matrix.

Aufgabenstellung

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zur Bestimmung von Orthonormalbasen von

$$\operatorname{kern} A = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}, \quad \operatorname{cobild} A = \{v \in \mathbb{R}^m \mid A^T v = 0\}$$

kann man eine Verallgemeinerung der QR-Zerlegung der Form

$$Q^T A \Pi = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

verwenden, wobei $\Pi \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Permutationsmatrix und $R \in \mathbb{R}^{k,k}$ eine nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix mit $k = \operatorname{rang} A$ ist. Zur numerischen Bestimmung einer solchen Zerlegung tauscht man in A zunächst eine Spalte maximaler euklidischer Norm nach vorn (beschrieben etwa durch Π_1) und bestimmt danach wie bei der normalen QR-Zerlegung eine Householder-Transformation H_1 derart, daß

$$H_1^T A \Pi_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & * \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}.$$

Anschließend verfährt man entsprechend mit $\tilde{A}$ usw. bis es keine Restmatrix mehr gibt oder die maximale euklidische Norm der Restspalten kleiner ist als $|r_{11}| \cdot \mathrm{eps}$. Im letzteren Fall sieht man die restlichen Einträge als (eventuell durch Rundungsfehler verfälschte) Nullen an und setzt den (numerischen) Rang k von A gleich der Anzahl der bis dahin abgearbeiteten Spalten.
Man überlege sich, wie man aus einer solchen Zerlegung die gewünschten Orthonormalbasen möglichst effizient bestimmen kann. Man implementiere das entwickelte Verfahren und teste die Implementierung an einer Reihe von (rangdefekten) Matrizen A unterschiedlicher Größe.

Quellen

$\emptyset$