Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Lösen von linearen Gleichungssystemen mittels schnellen Givens-Rotationen.

Aufgabenstellung

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit nichtsingulärem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sowie $b \in \mathbb{R}^n$ kann man statt A mittels Householder-Transformationen oder Givens-Rotationen auf obere Dreiecksgestalt zu transformieren sogenannte schnelle Givens-Rotationen verwenden. Man verzichtet dabei auf die Verwendung von orthogonalen Transformationen, um ohne Wurzeln auszukommen.

Schnelle Givens-Rotationen gibt es in zwei Ausprägungen Φ und Ψ gegeben durch

$$\hat{z} = \Phi z \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{z}_l = \begin{cases} z_l & \text{für } l \neq i, j, \\ z_i + \alpha z_j & \text{für } l = i, \\ \beta z_i + z_j & \text{für } l = j, \end{cases} \qquad l = 1, \ldots, n$$

bzw.

$$\hat{z} = \Psi z \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{z}_l = \begin{cases} z_l & \text{für } l \neq i, j, \\ \beta z_i + z_j & \text{für } l = i, \\ z_i + \alpha z_j & \text{für } l = j, \end{cases} \qquad l = 1, \ldots, n.$$

Dabei bezeichnen i und j wie bei der Given-Rotation die Indizes der Zeilen, die verwendet werden sollen, sowie α und β Parameter, die so gewählt werden sollen, daß sich $\hat{z}_j = 0$ ergibt. Dabei wird außerdem verlangt, daß zu gegebener positiv definiter Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Matrizen

$$\hat{D} = \Phi D \Phi^T \text{ bzw. } \hat{D} = \Psi D \Psi^T$$

wieder diagonal sind.

Ist $z_i \neq 0$, so ergibt sich für Φ

$$\beta = -\frac{z_j}{z_i}, \quad \alpha = -\beta \frac{d_i}{d_j}$$

und damit

$$\hat{z}_i = (1 + \gamma) z_i, \quad \hat{d}_i = (1 + \gamma) d_i, \quad \hat{d}_j = (1 + \gamma) d_j, \quad \gamma = -\alpha\beta = \frac{d_i}{d_j} \left(\frac{z_j}{z_i} \right)^2.$$

Ist $z_j \neq 0$, so ergibt sich für Ψ

$$\alpha = -\frac{z_i}{z_j}, \quad \beta = -\alpha \frac{d_j}{d_i}$$

und damit

$$\hat{z}_i = (1+\delta) z_j, \quad \hat{d}_i = (1+\delta) d_j, \quad \hat{d}_j = (1+\delta) d_i, \quad \delta = -\alpha\beta = \frac{d_j}{d_i}\left(\frac{z_i}{z_j}\right)^2.$$

Ausgehend von $A^{(0)} = A$, $b^{(0)} = b$ und $D^{(0)} = I$ erhält man $A^{(k+1)}, b^{(k+1)}, D^{(k+1)}$ aus $A^{(k)}, b^{(k)}, D^{(k)}$, indem wir eine Spalte z in $A^{(k)}$ sowie zwei Zeilen i und j auswählen, um mit dem obigen Vorgehen eine Null zu erzeugen. Dabei spielt $D^{(k)}$ die Rolle von D. Die Ausprägung der zu verwendenden schnellen Givens-Rotation wird nach folgender Strategie gewählt. Ist $z_j = 0$, so wählt man Φ mit $\alpha = \beta = 0$, d. h. man verändert nichts. Ist $z_i = 0$, so wählt man Ψ mit $\alpha = \beta = 0$, d. h. man vertauscht die beiden Zeilen. Ansonsten wählt man Φ mit den oben angegebenen Parametern, wenn $\gamma \leq \delta$ ist, andernfalls wählt man Ψ mit den oben angegebenen Parametern. Man iteriert dann dieses Vorgehen, bis $A^{(k)}$ schließlich obere Dreiecksgestalt besitzt, und löst das so transformierte lineare Gleichungssystem mit Rückwärtssubstitution.
Man implementiere dieses Verfahren und teste es an einer Reihe von Problemen unterschiedlicher Größe. Insbesondere verwende man Hilbert-Matrizen.

Quellen

$\emptyset$