Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Verallgemeinerung der rationalen Cholesky-Zerlegung auf indefinite Probleme.

Aufgabenstellung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, d. h. gelte $A^T = A$. Zur Lösung zugehöriger linearer Gleichungssysteme möchte man A so zerlegen, daß die Symmetrie von A berücksichtigt wird. Damit scheiden LR- und QR-Zerlegungen aus. Wegen der nicht vorausgesetzten positiven Definitheit von A kommt aber auch nicht (rationale) Cholesky-Zerlegung in Frage. Stattdessen kann man versuchen, eine Zerlegung der Form

$$\Pi^T A \Pi = LDL^T$$

zu bestimmen, wobei $\Pi \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Permutationsmatrix, $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_s)$ eine Blockdiagonalmatrix mit $D_i \in \mathbb{R}^{1,1}$ oder $D_i \in \mathbb{R}^{2,2}$ für $i = 1, \ldots, s$ ist.
Dazu bestimmt man für $A = (a_{ij})$ im ersten Schritt

$$\xi_{\text{diag}} = \max_{1 \le i \le n} |a_{ii}| = |a_{kk}|, \quad \xi_{\text{off}} = \max_{1 \le j < i \le n} |a_{ij}| = |a_{lm}|.$$

Gilt sowohl $\xi_{\text{diag}} < \text{eps}$ als auch $\xi_{\text{off}} < \text{eps}$, so ist A (numerisch) singulär und man bricht ab. Ist nun $\xi_{\text{diag}} \neq 0$ und $\xi_{\text{off}}/\xi_{\text{diag}} \le 1 + \varepsilon$, etwa mit $\varepsilon = 0.5$, so setzt man

$$D_1 = [\, a_{kk} \,],$$

andernfalls

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_{ll} & a_{lm} \\ a_{ml} & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

Man tauscht jetzt symmetrisch Zeilen und Spalten von A mittels einer Permutationsmatrix Π_1 derart, daß

$$\Pi_1^T A \Pi_1 = \begin{bmatrix} D_1 & C_1^T \\ C_1 & H_1 \end{bmatrix},$$

und bestimmt die Zerlegung

$$\Pi_1^T A \Pi_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 D_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & H_1 - C_1 D_1^{-1} C_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D_1^{-1} C_1^T \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Anschließend verfährt man entsprechend mit $\tilde{A} = H_1 - C_1 D_1^{-1} C_1^T$ usw. bis man entweder A als (numerisch) singulär erkannt hat oder eine Zerlegung der gewünschten Form vorliegen hat.
Man implementiere ein Unterprogramm, das zu gegebenem symmetrischem A die obige Zerlegung bestimmt, sowie ein Unterprogramm, das zu zerlegtem A und gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ berechnet, und teste sie an einer Reihe von Problemen unterschiedlicher Größe. Wie kann man obige Zerlegung ausnutzen, um den Trägheitsindex von A zu bestimmen?

Quellen

$\emptyset$