Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Numerische Optimierung

Ergänzung 2

Beispiel 7.13
Zu lösen sei

$$
\begin{aligned}
q(x) = \tfrac{1}{2}x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_2^2 \to \min \quad \text{s. t.} \qquad & G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad d = (0,0)^T, \\
x_2 \geq 0, \qquad & a_1 = (0,1)^T, \\
x_1 + 2x_2 \geq 2, \qquad & a_2 = (1,2)^T, \\
-5x_1 + 4x_2 \leq 10, \qquad & a_3 = (5,-4)^T, \\
x_1 \leq 3, \qquad & a_4 = (-1,0)^T.
\end{aligned}
$$

Sei $x_0 = (2,0)^T$. Dann ist $\mathcal{W}_0 = \{1,2\}$ und $g^0 = Gx^0 + d = (2,0)^T$. Damit sind die zugehörigen Lagrange-Parameter gegeben durch

$$
a_1\hat{\lambda}_1 + a_2\hat{\lambda}_2 = g^0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

und man erhält $\hat{\lambda}_1 = -4$, $\hat{\lambda}_2 = 2$, d. h. $x^1 = x^0 = (2,0)^T$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_0 \setminus \{1\} = \{2\}$. Wählt man dazu $Z = (2,-1)^T$, so erhält man $Z^TGZ = 3$, welches positiv definit ist.
Wegen $g^1 = g^0 = (2,0)^T$ ist zu lösen

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Es ergibt sich $p^1 = (-\frac{8}{3}, \frac{4}{3})^T$. Offensichtlich ist $\alpha_1 = 1$ und damit $x^2 = x^1 + \alpha_1 p^1 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})^T$, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 = \{2\}$.

Wie üblich ergibt sich jetzt $p^2 = (0,0)^T$ mit

$$a_2\hat{\lambda}_2 = g^2 \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

d. h. $\hat{\lambda}_2 = -\frac{2}{3}$ und damit $x^3 = x^2 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})^T$, $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2 \setminus \{2\} = \emptyset$. Wählt man dazu $\hat{Z} = I$, so ist $\hat{Z}^T G \hat{Z}$ offensichtlich indefinit. Für die (vereinfachte) Wahl $s = (0,1)^T$ gilt $s^T G s = -1 < 0$ sowie $s^T g^3 = -\frac{4}{3} < 0$. Wir setzen also $\mathcal{W}_3 = \{2\}$ und versuchen später, diese Beschränkung loszuwerden.

Es ist nun $x^4 = x^3 + \alpha_3 s$ mit $\alpha_3 > 0$ so zu bestimmen, daß eine weitere Nebenbedingung aktiv wird. Entsprechend des Skizze ist dies die dritte Bedingung. Man erhält $\alpha_3 = \frac{1}{3}$ sowie $x^4 = (-\frac{2}{3}, \frac{5}{3})^T$, $\mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_3 \cup \{3\} = \{2,3\}$.

Die nächste Iterierte ist also gegeben durch

$$x_1 + 2x_2 = 2, \quad -5x_1 + 4x_2 = 10$$

bzw. $x^5 = (-\frac{6}{7}, \frac{10}{7})^T$, $\mathcal{W}_5 = \mathcal{W}_4 = \{2,3\}$.

Als nächstes ergibt sich $p^5 = (0,0)^T$, d. h. $x^6 = x^5$. Außerdem gilt $\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3 \leq 0$. Wir würden jetzt gerne $\mathcal{W}_6 = \{3\}$ verwenden. Mit $\hat{Z} = (4,5)^T$ erhalten wir $\hat{Z}^T G \hat{Z} = -9$. Mit $s = (4,5)^T$ gilt neben $s^T G s = -9 < 0$ auch $s^T g^6 < 0$. Wir setzen also $\mathcal{W}_6 = \{2,3\}$ und suchen die nächste blockierende Nebenbedingung. Diese ist offensichtlich die vierte Bedingung. Wir erhalten also $x^7 = (3, \frac{25}{4})^T$ sowie $\mathcal{W}_7 = \mathcal{W}_6 \cup \{4\} = \{2,3,4\}$.

Wiederum ergibt sich $p^7 = (0,0)^T$ und damit $x^8 = x^7$. An dieser Stelle können wir sofort gefahrlos die zweite Beschränkung fallen lassen, d. h. $\mathcal{W}_7 = \{3,4\}$ setzen. Für die zugehörigen Lagrange-Parameter gilt wegen $g^8 = (3, -\frac{25}{4})^T$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_3 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{25}{4} \end{bmatrix},$$

d. h. $\hat{\lambda}_3 = \frac{25}{16}$, $\hat{\lambda}_4 = \frac{77}{16}$ und wir sind fertig.

□