Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(25) Sei $u, v \in \mathbb{R}^n$. Man zeige: Es ist $I - uv^T$ genau dann nichtsingulär, wenn $u^T v \neq 1$ ist. Die Inverse ist in diesem Fall gegeben durch die sogenannte Sherman/Morrison-Formel

$$(I - uv^T)^{-1} = I + \frac{uv^T}{1 - u^T v}.$$

(2 Punkte)

(26) Sei $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n,n}$ nichtsingulär und entstehe $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ aus A, indem man a_k durch $\tilde{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ersetzt.

(a) Man zeige, daß $\tilde{A}$ genau dann nichtsingulär ist, wenn $e_k^T A^{-1} \tilde{a}_k \neq 0$ gilt, wobei e_k den k-ten kanonischen Basisvektor bezeichnet.

(b) Unter der Annahme, daß $\tilde{A}$ nichtsingulär ist und daß für A bereits eine Dreieckszerlegung gemäß $\Pi A = LR$ berechnet wurde, entwickle man einen effizienten Algorithmus zur Lösung eines Gleichungssystems $\tilde{A}\tilde{x} = b$.

(4 Punkte)

(27) Zu einer Matrixnorm $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}_0^+$ sei die Menge $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^{m,m}$ durch

$$\mathbb{U} = \left\{ U \in \mathbb{R}^{m,m} \;\middle|\; \|UA\| = \|A\| \text{ für alle } A \in \mathbb{R}^{m,n} \right\}$$

definiert. Man bestimme $\mathbb{U}$ für die Zeilensummennorm sowie für die Spektralnorm. (4 Punkte)

(28) Die nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ besitze eine QR-Zerlegung entsprechend $A = QR$. Man zeige, daß diese Zerlegung eindeutig ist, falls man zusätzlich fordert, daß alle Diagonalelemente von R positiv sind. (2 Punkte)

Abgabe am Mittwoch, 25.05.2022, 09:15 Uhr, in der Vorlesung