Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(21) Sei

$$A = \begin{pmatrix} R & u \\ v^T & w \end{pmatrix},$$

wobei $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix, $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}$ sei.

(a) Man zeige, daß A genau dann nichtsingulär ist, wenn das sogenannte zugehörige Schur-Komplement $w - v^T R^{-1} u$ nicht verschwindet.
(b) Man bestimme im Fall $w - v^T R^{-1} u \neq 0$ die Dreieckszerlegung von A.
(c) Man gebe einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Dreieckszerlegung von A an. Wieviele Operationen werden in erster Näherung benötigt?

(4 Punkte)

(22) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nichtsingulär und $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{n,n}$ definiert durch

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Man zeige, daß D ebenfalls nichtsingulär ist und daß

$$\operatorname{cond}_\infty(D^{-1}A) \leq \operatorname{cond}_\infty(A)$$

gilt. (3 Punkte)

(23) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $a_{ij} \in \mathbb{M}_{2,l}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ und sei

$$a = \max_{i,j=1,\ldots,n} \{|a_{ij}|\}.$$

Weiter sei $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ die mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche in der Arithmetik von $\mathbb{M}_{2,l}$ berechnete obere Dreiecksmatrix der LR-Zerlegung von A. Man zeige, daß

$$|\tilde{r}_{ij}| \leq 2^{n-1} a$$

gilt. (4 Punkte)

(24) Man implementiere die Gauß-Elimination ohne und mit iterativer Nachverbesserung. In `C` verwende man für die normalen Berechnungen den Datentyp

`double` und für das Berechnen des Residuums entweder ebenfalls den Datentyp `double` (gleiche Genauigkeit) oder den Datentyp `long double` (erweiterte Genauigkeit). In anderen Programmiersprachen verwende man entsprechende Datentypen. Man iteriere dabei so lange, bis sich die ℓ_2-Norm des Residuums nicht mehr verkleinert. Man berechne die Lösung von $Ax = b$ mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ jeweils für

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad \text{(Hilbert-Matrizen)}$$

$n = 1, \ldots, 16$, und

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i, \\ 1 & \text{für } j = n, \\ -1 & \text{für } j < i, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \text{(Wilkinson-Matrizen)}$$

$n = 1, \ldots, 64$, wobei die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ so gewählt werde, daß die Lösung $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ durch $x_j = j^{-1}$, $j = 1, \ldots, n$, gegeben ist, mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche ohne sowie mit iterativer Nachverbesserung in gleicher und erweiterter Genauigkeit. Für jedes Problem gebe man an

- den betragskleinsten und betragsgrößten Diagonaleintrag in R der Dreieckszerlegung von A,
- die ℓ_2-Norm des Fehlers $\tilde{x} - x$ der mittels Gauß-Elimination berechneten Näherungslösung $\tilde{x}$,
- Anzahl der durchgeführten Iterationsschritte bei iterativer Nachverbesserung in gleicher bzw. erweiterter Genauigkeit und die ℓ_∞-Norm des Fehlers $\tilde{x} - x$ der damit erzielten Näherungslösung $\tilde{x}$.

(8 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 19.05.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung