Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(17) Die nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ besitze eine Dreieckszerlegung der Form $A = LR$, wobei L normiert sei. Man zeige, daß diese Zerlegung eindeutig ist. (2 Punkte)

(18) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt (streng) diagonaldominant, wenn gilt

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Man zeige, daß für ein solches A die Gauß-Elimination ohne Pivotsuche ausgeführt werden kann. (3 Punkte)

(19) Zu dem linearen Gleichungssystem $Ax = b$,

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix},$$

mit exakter Lösung $x = (1, -1)^T$ seien die Näherungslösungen

$$\tilde{x}_1 = (0.999, -1.001)^T, \quad \tilde{x}_2 = (0.341, -0.087)^T$$

gegeben.

(a) Man bestimme die zugehörigen Residuen $r_i = b - A\tilde{x}_i$, $i = 1, 2$. Was fällt auf?

(b) Unter der Annahme, daß die Einträge von A und b mit einem absoluten Fehler vom Betrag bis zu 0.001 behaftet sein können, beurteile man die obigen Näherungslösungen mit Hilfe des Satzes von Prager/Oettli.

(c) Man bestimme zu A die Inverse A^{-1} und die Kondition $\mathrm{cond}_\infty A$ bzgl. der Zeilensummennorm.

(4 Punkte)

(20) Man bestimme in der Arithmetik von $\mathbb{M}_{10,3}$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.915 & 0.659 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.256 \end{pmatrix},$$

mittels

(a) Cramerscher Regel,
(b) Gauß-Elimination ohne Pivotsuche,
(c) Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche.

(5 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 12.05.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung