Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(9) Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ seien die Normen

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p},\ p \in [1, \infty), \quad \|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$$

sowie für $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ die zugehörigen Operatornormen

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p,\ p \in [1, \infty]$$

gegeben. Man zeige, daß

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \qquad \text{(Spaltensummennorm)}$$

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A^T A\}, \qquad \text{(Spektralnorm)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(Zeilensummennorm)}$$

mit $A = (a_{ij})$ sowie

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p \text{ für alle } A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ und } x \in \mathbb{R}^n,$$
(Verträglichkeit)

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p \text{ für alle } A \in \mathbb{R}^{m,k} \text{ und } B \in \mathbb{R}^{k,n}.$$
(Submultiplikativität)

(5 Punkte)

(10) Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ und $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ nichtsingulär.
(a) Man zeige, daß dann durch $\|x\|_S = \|Sx\|$ eine weitere Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.
(b) Man zeige für die zugehörige durch

$$\|A\|_S = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_S}{\|x\|_S}$$

für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ definierte Operatornorm, daß

$$\|A\|_S = \|SAS^{-1}\|.$$

(2 Punkte)

(11) Beschreibe $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ mit normierten Vektorräumen $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ ein wohlgestelltes Problem und sei

$$\kappa_{\text{abs}} = \sup_{\substack{x_1,x_2 \in \mathbb{X} \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\|f(x_2) - f(x_1)\|_{\mathbb{Y}}}{\|x_2 - x_1\|_{\mathbb{X}}}$$

die zugehörige Kondition (bzgl. des absoluten Fehlers). Sei weiter $\hat{x} \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ mit $f(\hat{x}) \in \mathbb{Y} \setminus \{0\}$.

(a) Man zeige, daß durch

$$\|x\|_{\hat{\mathbb{X}}} = \|x\|_{\mathbb{X}} / \|\hat{x}\|_{\mathbb{X}}, \quad \|y\|_{\hat{\mathbb{Y}}} = \|y\|_{\mathbb{Y}} / \|\hat{y}\|_{\mathbb{Y}}$$

Normen auf $\mathbb{X}$ bzw. $\mathbb{Y}$ definiert sind.

(b) Man bestimme die zu den in (a) definierten Normen gehörige Kondition κ_{rel} (bzgl. des relativen Fehlers) von f in Relation zu κ_{abs}.

(2 Punkte)

(12) Die interne Uhr der Computer-Steuerung einer im zweiten Golf-Krieg eingesetzten Patriot-Abfangrakete zählte die seit dem Programmstart vergangene Anzahl $k \in \mathbb{N}_0$ von Zehntelsekunden. Für die weiteren Berechnungen wurde der aktuelle Zeitpunkt t durch Multiplikation mit $u = \frac{1}{10}$ bestimmt. Da u für $b = 2$ keine Maschinenzahl ist, wurde mit einer Approximation $\tilde{u}$ gearbeitet, die sich entsprechend des Beweises zu Satz 1.1 bei der Wahl $r = 1$ ergibt, wenn man nach 24 Ziffern abbricht.

(a) Man bestimme mit Hilfe eines Computerprogramms die verwendeten Ziffern d_i, $i = 1, \ldots, 24$, von $\tilde{u}$.

(b) Man bestimme auf mindestens drei signifikante Stellen den absoluten Fehler $\varepsilon = |\tilde{u} - u|$.

(c) Unter der Annahme, daß die abzufangende Scud-Rakete eine Geschwindigkeit von $v = 1670\ [\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ besitzt, bestimme man den durch Ersetzen von u durch $\tilde{u}$ eingeschleppten Fehler $\Delta s = v \cdot k \cdot \varepsilon$ bei der Berechnung des von der Scud-Rakete zurückgelegten Wegs, wenn das Ereignis 100 Stunden nach Programmstart stattfindet.

(d) Man überlege sich mindestens drei Möglichkeiten, mit denen man die Genauigkeit der Bestimmung des zurückgelegten Wegs verbessern kann.

(3 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 28.04.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung