Musterlösung zur Vorlesung „Analytische Geometrie“

Sommersemester 2011 - Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie VI

erstellt von Marco Neumann

VI - 1.

(a) Anhand der ersten Koordinate erkennt man bereits, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Damit ist der Vektorraum $V_E := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ zweidimensional und folglich ist E eine Ebene.

Zunächst suchen wir ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \tag{1}$$

dessen Lösung V_E ist. Durch Einsetzen des zweiten bzw. ersten Basisvektors erhalten wir nacheinander die Bedingungen

$$b = -c \qquad \text{und} \qquad 2a = b. \tag{2}$$

Somit erhalten wir z. B. für $a = 1$ das Gleichungssystem

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \tag{3}$$

Einsetzen des Stützvektors der Ebene E liefert uns die zugehörige rechte Seite:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \tag{4}$$

(b) F_γ ist genau dann keine Ebene, wenn der Vektorraum $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{a_\gamma, b_\gamma\}$ eindimensional ist. Das ist genau dann der Fall, wenn a_γ und b_γ linear abhängig sind. Also genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit:

$$\lambda a_\gamma = b_\gamma \tag{5}$$

Anhand der zweiten und dritten Koordinate der Vektoren erkennt man, dass dies nur für $\lambda = -4$ der Fall sein kann. Die erste Koordinate liefert damit die Bedingung

$$\begin{aligned} && -4\gamma^2 &= 9 - 5\gamma^2 \\ \Leftrightarrow && \gamma^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow && \gamma &= \pm 3 \end{aligned} \tag{6}$$

Wir erhalten also

$$\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\} \tag{7}$$

(c) Die Gerade G_γ verläuft genau dann durch b_γ, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$b_\gamma = f + \lambda a_\gamma \tag{8}$$

Die zweite Zeile der Gleichung (8) liefert

$$-8 = 3 + 2\lambda, \tag{9}$$

also $\lambda = -\frac{11}{2}$. Eingesetzt in die dritte Zeile von (8) ergibt

$$-4\gamma = 1 - \frac{11}{2}\gamma \tag{10}$$

und damit $\gamma = \frac{2}{3}$. Setzen wir diese Ergebnisse in die erste Zeile von (8) ein, so ergibt sich

$$\underbrace{9 - 5 \cdot \frac{4}{9}}_{>0} = \underbrace{-\frac{11}{2} \cdot \frac{4}{9}}_{<0}. \tag{11}$$

Dies ist ein Widerspruch, es folgt also

$$\tilde{\Gamma} = \emptyset \tag{12}$$

(d) Die Gerade G_γ verläuft genau dann parallel zur Ebene E, wenn $a_\gamma \in V_E$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 \\ 2 \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$\mu - \lambda = 2 \tag{14}$$

Eingesetzt in die erste und dritte Zeile ergibt sich somit:

$$\gamma = -2\lambda + \mu = -2\lambda + 2 + \lambda = -\lambda + 2 \tag{15}$$

$$\gamma^2 = -2\lambda \tag{16}$$

Lösen wir nun Gleichung (15) nach λ auf und setzen in Gleichung (16) ein, ergibt sich

$$\gamma^2 = -2(2-\gamma) = 2\gamma - 4 \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \gamma^2 - 2\gamma + 4 = 0 \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \gamma_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-4} \notin \mathbb{R} \tag{19}$$

Es existiert also kein solcher Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

(e) Aus Teil (a) und Folgerung 3.33 aus der Vorlesung folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor zu E ist. Damit ergibt sich

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \tag{20}$$

sowie die Hessesche Normalenform von E:

$$E = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle v, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\rangle = -2 \right\} \tag{21}$$

Nach Satz 3.32 (c) berechnet sich dann der Lotfußpunkt h_* wie folgt:

$$\begin{aligned} h_* &= \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} + \left(-2 - \left\langle \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\rangle\right)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} && (22)\\ &= \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} + (-2-4)\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} && (23)\\ &= \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} && (24)\\ &= \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} && (25) \end{aligned}$$

(f) Der kleinste Radius $r_{\min}$ einer solchen Kugel ist durch den Abstand des Punktes von der Ebene gegeben. Es gilt also

$$r_{\min} = \left\| \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6 \tag{26}$$

(g) Nach Teil f) besitzt eine solche Kugel mindestens einen Radius von 6. Es ist offensichtlich ausreichend, die Aussage für eine Kugel mit Radius 6 zu zeigen, da jede Gerade dann auch Kugel mit größerem Radius und gleichem Mittelpunkt schneidet. Man kann feststellen, dass bereits der Stützvektor f von G_γ einen kleineren Abstand als 6 vom Punkt $\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$ hat:

$$\left\| \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20} < 6 \tag{27}$$

Da jede Gerade, die einen inneren Punkt einer Kugel beinhaltet deren Rand offensichtlich in zwei Punkten schneidet, wäre dies bereits als Lösung ausreichend.

Eine allgemeinere und weniger argumentative Lösung erhält man, indem man den allgemeinen Punkt der Gerade G_γ in die Kugelgleichung

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 6^2 \tag{28}$$

einsetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
36 &= (\lambda\gamma^2 - 4)^2 + (3 + 2\lambda - 5)^2 + (1 + \lambda\gamma - 1)^2 && (29)\\
&= \lambda^2\gamma^4 - 8\lambda\gamma^2 + 16 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + \lambda^2\gamma^2 && (30)\\
&= (\gamma^4 + \gamma^2 + 4)\lambda^2 + (-8\gamma^2 - 8)\lambda + 20 && (31)
\end{aligned}$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in λ. Es besitzt genau dann zwei reelle Lösungen, wenn seine Diskriminante D größer als 0 ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
D &= 64(\gamma^2 + 1)^2 - 4(20 - 36)(\gamma^4 + \gamma^2 + 4) && (32)\\
&= 64(\gamma^2 + 1)^2 + 64(\gamma^4 + \gamma^2 + 4) > 0 && (33)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ zwei Schnittpunkte mit der Kugel.

VI - 2. Die Geraden in Parameterform sind

$$G_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{34}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \tag{35}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{36}$$

Offensichtlich ist keines der Geradenpaare zueinander parallel. Wir berechnen nun ihren jeweiligen Abstand, um zu entscheiden, ob sie windschief sind oder sich schneiden. Bezeichne dazu n_{ij} eine gemeinsame Einheitsnormale der Geraden G_i und G_j, dann gilt:

$$n_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad n_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad n_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \tag{37}$$

Damit ergeben sich folgende Paare paralleler Ebenen in Hessescher Normalform (E_{ij}

enthält G_i und ist parallel zu G_j):

$$E_{12} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \tag{38}$$

$$E_{21} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \tag{39}$$

$$E_{13} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \tag{40}$$

$$E_{31} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \tag{41}$$

$$E_{23} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \tag{42}$$

$$E_{32} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \tag{43}$$

Damit ergeben sich nach Satz 3.21 aus der Vorlesung die Abstände

$$d(G_1, G_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad d(G_1, G_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad d(G_2, G_3) = 0. \tag{44}$$

Zuletzt berechnen wir noch den Schnittpunkt der Geraden G_2 und G_3:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

mit der offensichtlichen Lösung $(\lambda, \mu) = (-1, 0)$. Damit ist also P_3 Schnittpunkt der Geraden G_2 und G_3.